Г. Я. Мартыненко

Математика гармонии: эпоха рационализма — XVII в.

Венские бочки Иоганна
В теснинах Альп, в пещерах бесконечных,
Вдали от шума чащ, небесной бирюзы,
Неспешно вызревает сок лозы,
Во чреве венских бочек вековечных.

В тех бочках тайна есть и числовой секрет,
Изгибом явленный конических сечений,
Изяществом пропорций, измерений,
В которых Кеплер разгадал движение планет.

Но шел за годом год, сменялись поколенья,
А что осталось? — средство для храненья
Пьянящей влаги. За давностию лет

Забыт тех бочек числовой секрет,
Что мыслью Кеплера мудрейшего добыт —
Тот план загадочный в альпийском чреве скрыт.

В Европе с началом XVII в. феодальные устои постепенно разрушались под натиском молодого энергичного капитализма. Составной частью этого процесса была промышленная революция – переход от мануфактурного производства к фабричному и серия изобретений, среди которых пальма первенства принадлежит паровой машине.

Новое время было вместе с тем эпохой революции в науке. Но научная революция заявила о себе не сразу. Ее потенциал накапливался постепенно в недрах предыдущих столетий, и косное, консервативное мировоззрение с нарастающей скоростью отступало под натиском религиозных ересей, гуманистических идей Возрождения, изобретений, научных открытий, в том числе математических. В этой борьбе крепла вера в силу разума, рациональности, здравого смысла.

Великие рационалисты XVIII в. и, прежде всего, *Рене Декарт* (1696–1650), искали в природе объективную логику и находили ее в универсальных причинных связях. Но они также были убеждены в том, что в человеческом *обществе* должны господствовать логика, разум, порядок, а следовательно, право и справедливость. Все иррациональное (слепую веру, нетерпимость, невежество, логику костра и плахи) они подвергали жесточайшей критике.

Рационализм Декарта положил начало новой эпохе в науке, культуре, в характере мышления. Разум устранил из мироустройства божественное начало, объяснив всю совокупность известных фактов законами движения и взаимодействия тел. При этом, по мнению Декарта, картина мира, логически сконструированная на основе небольшого числа исходных постулатов, является однозначным, абсолютно точным и в этом смысле окончательным отображением реального мира.

Новые веяния затронули все стороны жизни: философию, науку, искусство.

1. Представление о гармонии в эстетике классицизма

Эстетика французского классицизма в первой трети XVII в. складывается параллельно с рационалистической философией Декарта (1596–1650). Основной ее принцип – «подражать природе», следуя разуму (но не чувству), рациональному (но не эмоциональному), общему (но не частному). Новая философия была направлена против вычурного и манерного искусства светских салонов, примитивного искусства народных низов, фольклора, бытового реализма, против стихийного своеволия и стихийной разнузданности бурлеска.

Картезианские идеи нашли благодатную почву в творчестве Корнеля – первой «жертвы» строгих правил в искусстве, который «добровольно нес свой крест» и тем самым подал всем драматургам пример героизма» (Гилберт, Кун, 1960, с. 219). В трех критических работах – «О функциях и частях драматической поэмы», «О трагедии», «О трех единствах» он стремился показать, что надлежащая форма, изящество и порядок могут быть введены в театре только строгим соблюдением правил (там же, с. 220). Французские деятели искусства, сохраняя в целом верность идеалам Возрождения, в холодной ясности мысли, четкости анализа, жесткой регламентации своего труда продвинулись гораздо дальше, чем итальянцы. При этом, если в эпоху Возрождения в центре внимания философов была живопись, скульптура и архитектура, то в XVII веке роль лидера берет на себя литература и прежде всего драматургия и поэзия.

Наиболее яркое воплощение идеи классицизма нашли в «Поэтическом искусстве» (1674) *Никола Буало* (1636–1711). На основе духа и буквы французского классицизма были сформулированы требования его поэтики: гармония и соразмерность частей художественного произведения, логическая стройность композиции, простота сюжета, ясность, четкость и лаконичность языка (Буало, 1957).

Такой рационализм в художественном творчестве вносил определенные коррективы в понимание гармонии. Гармоничным считалось то, что отвечало определенным наперед установленным правилам, отсеивающим все лишнее, вычурное, случайное. Буало призывает поэтов стремиться к простоте сюжета, стройности композиции, неукоснительно следовать законам языка, избегать многословия и украшательства, соблюдать меру и порядок при построении поэтических образов. Для Буало главное – смысл произведения. Но форма, как считал Буало, важна лишь в той мере, в какой она обеспечивает передачу содержания. В сущности, *согласно поэтике Буало, произведение можно считать гармоничным только тогда, когда форма эффективно обеспечивает* *передачу смысла*. Приведем несколько фрагментов из «Поэтического искусства», в которых фигурирует слово «гармония»:

«…Велел гармонии к ногам рассудка пасть
И разместив слова, удвоил тем их власть».

«Гармония стиха меня не привлечет,
Когда для уха чужд и странен оборот».

«Пусть гармоничное, изящное творенье
Богатством образов дарует наслажденье».

«Поэму стройную, чей гармоничен ход,
Не прихоть легкая, не случай создает».

Но нужно сразу же оговориться, что отношения между неоклассическим искусством и наукой были не столь безоблачными. Если в искусстве в качестве эталона строгости и порядка выступал Аристотель, то в науке образцом для подражания был Демокрит. Декарт, Спиноза, Лейбниц, Локк, Паскаль, Кеплер, Паскаль и др. были людьми, обладавшими здравым смыслом, практической сметкой, научной интуицией, но их строгий и дисциплинированный ум далеко не всегда был склонен поддаться воздействию легкомысленных фантазий и поэтических образов, которые казались им не слишком серьезными. «Я согласен, – писал Локк (1632–1704) о произведениях, блещущих остроумием и фантазией, – что в беседах, от которых мы ждем удовольствия и услады, а не научных знаний и моральных поучений…. словесные украшения … вряд ли можно осуждать. И все же, если говорить откровенно, то следует признать, что все искусство риторики, кроме вопросов порядка и ясности, вся деланность и вычурность речи, придуманная во имя красноречия, направлены лишь к тому, чтобы внушить людям ложные понятия, разжигать страсти и тем самым создавать неправильное мнение, и поэтому они действительно ведут к обману» (Дж. Локк, 1898: цт. по: Гилберт, Кун, 1960). Лейбниц был весьма одаренным и разносторонним ученым, но и он позволял себе весьма недвусмысленные высказывания о «долевой» значимости науки и искусства. Вот две его весьма откровенные фразы. Первая: «Я в самом деле рад, что Драйден получил тысячу фунтов за своего Вергилия, но хотел бы, чтобы Галлей мог иметь в четыре раза больше, а Ньютон – в десять раз»; «Я очень сожалею о погибших во время пожара в Уайтхолле картинах Гольбейна. И все же я склонен согласиться с русским царем[*], сказавшим мне, что он больше восхищается некоторыми хорошими машинами, чем собранием прекрасных картин, которые ему показывали в королевском дворце» (цт. по: Гилберт, Кун, с. 222).

Главный идеолог рационализма Декарт, отдавая явное предпочтение математическим и логическим стандартам, настроен менее решительно в

[*] Имеется в виде Петр I.

пренебрежительном отношении к искусству. Более того, он возрождает теорию Аристотеля, касающуюся того, что между *чувством и объектом восприятия существует пропорция*, которая регулирует отношения между красотой и удовольствием, т. е. и красота и удовольствие по Декарту означает только отношение нашего суждения к предмету. Таким образом, гармония связанная с красотой, определяется не только внутренней организацией объекта реального мира или произведения искусства, а прежде всего *пропорцией стимула и отклика*. *Пропорциональность такого рода Декарт связывал с идеалом золотой середины* (Гилберт, Кун, 1960, с. 225). В более позднее время сходные идеи высказывались представителями экспериментальной психологии, измерявшими приращение реакции в зависимости от приращения стимула. Плодом этих усилий явился закон Вебера-Фехнера, согласно которому при возрастании силы раздражителя в геометрической прогрессии интенсивность ощущения возрастает в арифметической прогрессии (Штерн, 2003, с. 49–50).

Декарт считал, что «то ощущение, или состояние, интервал, или ритм, доставляет удовольствие, которое не надоедает и не утомляет. В эстетической практике следует избегать крайностей: с одной стороны запутанных, сложных фигур, а с другой монотонности и незавершенности» (Гилберт, Кун, 1960, с. 225). Такая интерпретация пропорциональности и гармонии и эстетики напрямую соотносится с представлениями перцептивной эстетики XX века. Так, согласно теории Айзенка, количество энергии, необходимой для восприятия эстетического объекта обратно пропорционально эстетическому удовольствию (Eysenck, 1942). С идеями Айзенка тесно соприкасается и информационная эстетика Макса Бензе, устанавливающая зависимость эстетического удовлетворения от оптимального соотношения между упорядоченностью и сложностью воспринимаемого объекта (Bense, 1969). Обратим внимание на то, что такой вариант гармонии в математико-гармонических изысканиях еще ждет своей интерпретации и исследования.

2. **Механистические представления и математика**

Физический мир начинают мыслить как своего рода гигантский механизм, части которого работают по неизменным законам. Нередко Вселенную сравнивают с часами.

Этот образ в применении к греческой системе небесных сфер впервые использовал Николай Орем, сравнивший Бога с мастером, который, изготовив часы, предоставляет им затем ходить самим в соответствии с установленным порядком. С часами, которые движутся под действием тяжести, сравнивал «небесную машину» и Кеплер. Декарт пошел еще дальше. Оставляя сознание только человеку, он уподобил ходу часов, состоящих только из колес и пружин, даже жизнедеятельность животных и их органов.

Но если мир, по крайней мере, физический, представляет собой машину, то средством познания его должна быть механика. А поскольку механика развивалась теперь как наука математическая, то математика приобретала значение универсального метода физического познания.

Одной из непосредственных причин научного прогресса в эпоху рационализма явилось радикальное изменение в отношениях между наукой и техникой. Меняется социальная функция науки и ученого. Многие крупные математики были одновременно и инженерами, и конструкторами. Еще чаще, чем инженером, математик нового времени бывал одновременно астрономом, механиком, физиком и даже философом и поэтом. В целом наука этого периода отличалась удивительной гармонией науки и искусства эксперимента и теории, науки и практики.

В XV в. математические исследования гигантски расширяются. Возникает несколько новых наук: аналитическая геометрия, проективная геометрия, теория вероятностей, а главное, исчисление бесконечно малых. За один этот век математика обогатилась большим числом методов и понятий, чем за предыдущие 15 столетий.

Великие мыслители семнадцатого века и прежде других Декарт, искали общий метод мышления, который бы позволял быстрее делать изобретения и выявлять истину в науке. Так как единственной наукой о природе, обладавшей в известной мере систематическим строением, была тогда механика, а ключ к пониманию механики давала математика, то математика стала наиболее важным средством для понимания Вселенной. Более того, математика со своими убедительными утверждениями сама была блестящим примером того, что в науке можно найти истину. Исключительная роль математики нашла отражение в книге Декарта «Рассуждение о методе» (1637 г.) и его «Геометрии». Последняя в сущности была алгеброй, включавшей в себя всю классическую геометрию. Тем самым был завершен процесс алгебраизации геометрии.

Математика этой революционной эпохи огромна. Она получила не только новое дыхание, она по существу пережила второе рождение. И в сонме идей, концепций методов трудно разыскать те, которые имеют самое непосредственное и явное отношение к математико-гармоническим изысканиям. Придется общаться с тем материалом, о котором просто невозможно не упомянуть.

3. Теория симметрии

В предыдущем очерке (Мартыненко, 2010) мы говорили о некоторых симметрийных представлениях в эпоху Возрождения, принадлежащие Леонардо да Винчи. Достижения великого Леонардо в этой области были существенно обогащены Иоганном Кеплером. Симметрийные идеи изложены Кеплером в его шутливой миниатюре «О шестиугольных снежинках» (Кеплер, 1983), которая представляет собой собрание небольших изящных «новелл», отличающихся изысканным и непринужденным стилем, в котором Кеплер проявил себя не только как выдающийся ученый, но и талантливый, ироничный писатель.

После шутливого вступления, первую «новеллу» «Снежные звездочки» Кеплер начинает так: «Но шутки в сторону – займемся делом. Поскольку всякий раз, когда начинает идти снег, первые снежинки имеют форму шестиугольной звезды, то на это должна быть определенная причина». И далее астроном виртуознейшим образом раскрывает эти причины при помощи ироничной логики, которую так впоследствии обожал Альберт Эйнштейн. Надо признать, однако, что в технике иронии, Эйнштейн, безусловно, великому Иоганну уступал. Удивителен также набор примеров, выстроенный Кеплером: пчелиные соты, цветы, зерна граната, правильные ромбические тела, горошины, лепестки, тела животных, морозные узоры. И уже в самом конце автор дает ответ на вопрос, от чего зависит шестиугольная форма снежинок и шестиугольная форма чего бы то ни было в природе. Кеплер завершает свое исследование практическими советами ботаникам, минерологам и химикам, призывая их обратить внимание на геометрические фигуры, которые встречаются в их повседневной работе.

В книге Кеплера нет детальных математических выкладок. Но в отличие от многих исследователей (предшественников, современников и последователей, включая и тех которые живут в XXI в.), Кеплер, концентрирует внимание на физических причинах формообразования. Такой подход в XVII был новаторским. Следует признать, что толкование траектории формообразования по Кеплеру находит сторонников даже среди современных кристаллографов в их воззрениях на природу кристаллографических структур (Шафрановский, 1971, 1978). Высокие научные достоинства кеплеровского трактата о шестиугольных снежинках отмечает и академик В. И. Вернадский: «Первой научной работой в кристаллографии явился небольшой труд Кеплера «О снеге». В нем впервые точно и ясно выражен закон о сохранении постоянства гранных углов, правда, для одного вещества – снега. Эта работа явилась следствием увлечения Кеплера гармонией мира, его исканий разнообразных численных и геометрических соотношений в природных явлениях. Значение работы заключается в том, что он впервые доказал, что кристаллы подчиняются законам геометрии» (Вернадский, 1904, с. 15, цт. по: Кеплер, 1983, Комментарии, с. 188).

Интересны также некоторые частные задачи Кеплера, например, задачи об оптимальной упаковке шестиугольников, треугольников и шаров. Так, наибольшая плотность упаковки достигается при пирамидальном упорядочивании шаров друг над другом (Schneer, 1960). Математически доказать этот факт не удавалось на протяжении 400 лет — первое сообщение о доказательстве «задачи Кеплера» появилось лишь в 1998 году в работе математика Томаса Хейлса.

К рассмотренной книге Кеплера примыкает еще одна его интересная работа «Новая стереометрия винных бочек» (1615) (Кеплер, 1935), в которой рассматривается способ определения объёмов разнообразных тел вращения (не только бочек). С помощью вращения дуг, образованных коническими сечениями (параболой, гиперболой и эллипсам, а также их частями) он строил стереометрические тела с центральной симметрией в форме «яблока», «лимона», «груши», «айвы», «сливы» и др. (всего 92 формы).

4. **Золотое сечение и числа Фибоначчи**

В работе о снежинках Кеплера есть очень интересный раздел под названием «Правильные тела, основанные на числе пять, и их возникновение из божественных пропорций». Здесь Кеплер говорит о том, что два правильных многоугольника – додекаэдр и икосаэдр – обладают одним замечательным свойством. Первый ограничен правильными пятиугольниками, а второй – равносторонними треугольниками, которые тесно прилегают друг к другу так, что образуются *пятигранные* пространственные углы. Причем построение таких углов невозможно без пропорции, которая со времен Луки Пачоли именуется божественной. Кеплер пишет, что «устроена она так, что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних члена, если их сложить, дают следующий член, причем та же пропорция сохраняется до бесконечности» (Кеплер, 1983, с. 17), т. е. Кеплер определяет золотую пропорцию через суммативное правило последовательности Фибоначчи. Таким образом, *впервые идея золотого сечения трактуется с позиций рекуррентной последовательности*. После этого Кеплер приводит пример классической последовательности с двумя начальными затравочными единицами. Наращивая числовой ряд, Кеплер говорит (хотя и не совсем строго) о том, что отношение последующего члена к предыдущему устремляется к постоянной величине.

По образцу такой, как говорит Кеплер, «саму себя продолжающей пропорции», строятся различные природные тела пятиугольной формы. Примером такой фигуры является пятилепестковый цветок, характерный для большинства деревьев и кустарников.

Кеплеру принадлежит еще одно серьезное достижение, связанное с золотым сечением. Речь идет о так называемом треугольнике Кеплера, который рассматривается в книге Марио Ливио (Mario Livio, 2002, с.149). Прямоугольный треугольник Кеплера сочетает в себе два математических свойства: теорему Пифагора, которая формирует суммативное правило золотого сечения и мультипликативное правило, связанное со средним геометрическим (больший катет равен среднему геометрическому из меньшего катета и гипотенузы). По словам Марио Ливио, именно это сочетание дало основание Кеплеру произнести крылатую фразу: «Геометрия таит в себе два великих сокровища. Одно из них – теорема Пифагора, другое – разделение отрезка на две части в крайнем и среднем отношении. Первое подобно слитку золото, второе же – драгоценному камню».

Числами Фибоначчи и золотым сечением увлекался и знаменитый французский астроном Джовани Доменико Кассини (1625–1712). Он предложил изящную формулу, вошедшую в историю как правило Кассини, устанавливающему связь между квадратом любого числа в последовательности

Фибоначчи и произведением контактных с ним обрамляющих чисел (Гиндикин, 2001; Стахов, 2005).

5. Математическая гармония космоса

Кеплер в книге «Космографическая тайна», опубликованной в 1595 г. (Kepler, 1595), обратился к идеям Платона и платоновым телам, чтобы построить теорию планетарных расстояний с помощью правильных многогранников, попеременно вписанных в сферы и описанных около сфер. Кеплер решил, что он разгадал замысел создателя и смог расчислить гармонию сфер. По Кеплеру шесть сфер, соответствующих шести планетам – Сатурну, Юпитеру, Марсу, Земле, Венере и Меркурию, разделяются кубом, тетраэдром, додекаэдром, октаэдром и икосаэдром. Он пытался найти причины того, почему создатель выбрал существующий порядок планет, опираясь на математические свойства многогранников. Его книга завершается могучим апофеозом, в котором заключен символ его веры: «Верую, что божественность в мире обширна» (Credo spatioso numen in orbe). Приводя эти слова, Герман Вейль пишет: «Мы и поныне разделяем его убеждение в математической гармонии вселенной. Это убеждение подтверждено критерием беспрерывно расширяющегося опыта. Но ныне мы ищем эту гармонию не в статических формах, подобных правильным многогранникам, а в законах динамики» (Вейль, 2007, с. 101–102). Но правильные многогранники, вопреки мнению Вейля, также не исчерпали свой потенциал, совершив уже в XIX столетии выход на математическую авансцену в теории конечных групп Галуа (Стилвел, 2004, с. 39).

Что же касается Кеплера, то на момент создания своей первой космогонической теории он, конечно, ничего не знал о трех внешних планетах Солнечной системы – Уране, Нептуне и Плутоне, открытых, соответственно, в 1781, 1846 и 1930 гг. Одним словом, теория Кеплера рухнула, когда был открыт Уран.

В последующие годы Кеплер совершенствовал свою систему на основе теории конических сечений греческих математиков, обнаружив после тщательного анализа накопленных астрономических измерений, что орбиты планет имеют форму эллипса, в одном из фокусов которого находится солнце. Эта констатация известно как первый закон Кеплера.

Затем был сформулирован второй закон: радиус-вектор, соединяющий планету и Солнце, в равное время описывает равные площади. Это означало, что чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется.

Оба закона были сформулированы Кеплером в 1609 году в книге «Новая астрономия», причём, осторожности ради, он относил их только к Марсу.

Новая модель движения вызвала огромный интерес среди учёных-коперниканцев, хотя не все её приняли. Галилей кеплеровы эллипсы решительно отверг, а Кассини вместо эллипсов предложил свои овалы (кривые четвертого порядка).

Тем временем Кеплер продолжает астрономические исследования и в 1618 г. открывает третий закон: отношение куба среднего удаления планеты от Солнца к квадрату периода обращения её вокруг Солнца есть величина постоянная для всех планет. Этот результат Кеплер публикует в завершающей книге «Гармония мира», причём применяет его уже не только к Марсу, но и ко всем прочим планетам.

Отметим, что в книге, наряду с ценнейшими научными открытиями, изложены также фантастические рассуждения автора о «музыке сфер» и платоновых телах, которые составляют, по мнению Кеплера, эстетическую суть высшего проекта мироздания. Во всем, что касалось гармонии, Кеплер всегда был верен себе, он верил в нее до конца жизни и в 1621 году переиздал «Тайну мира», внеся в нее многочисленные изменения и дополнения.

Законы планетной кинематики, открытые Кеплером, послужили позже Ньютону основой для создания теории тяготения. Ньютон математически доказал, что все законы Кеплера являются следствиями закона тяготения.

Система мира Кеплера претендовала не только на выявление законов движения планет, но и на гораздо большее. Аналогично пифагорейцам, Кеплер считал мир реализацией некоторой числовой гармонии, одновременно геометрической и музыкальной. «Я выяснил, – писал он, – что все небесные движения, как в их целом, так и во всех отдельных случаях, проникнуты общей гармонией — правда, не той, которую я предполагал, но ещё более совершенной». В «Гармонии мира» он утверждает, что человеческая душа способна «резонировать» с лучами света, исходящими от небесных тел, она запечатлевает в памяти конфигурацию этих лучей в момент своего рождения. В последнее время много говорится о влиянии космоса на человека и человеческую историю. Может быть, во многом Кеплер был не слишком далек от истины.

6. Комбинаторика

Термин «комбинаторика» родился именно в данную эпоху. Впервые он появился в « Рассужденеии о комбинаторном искусстве» Лейбница. Эту работу можно считать заявкой на открытие нового отдела математики под названием «комбинаторика».

Крупный вклад в становление и развитие комбинаторики внес Блез Паскаль (1623–1662), переоткрывший арифметический треугольник, который был известен в Индии еще в X в. Этот треугольник выглядит так:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

Числа этого треугольника являются коэффициентами в формуле бинома $(a+b)^n$. Придавая различные значения *n*, получаем:

$$\text{при } n=0 \ \ (a+b)^0 = 1,$$
$$\text{при } n=1 \ \ (a+b)^1 = a+b,$$
$$\text{при } n=2 \ \ (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$\text{при } n=3 \ \ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+b^3 \quad \text{и т. д.}$$

Арифметическому треугольнику было присвоено имя Паскаля не случайно и вполне заслуженно. В своем треугольнике он объединил алгебру и комбинаторику, так как элементы арифметического треугольника можно интерпретировать двумя способами: как коэффициенты в разложении бинома и как число сочетаний из *n* элементов по *k*. Треугольник нашел применение в теории вероятностей в задаче о разделе ставок. В треугольнике Паскаля на вершине и по бокам расположены единицы, а каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Продолжать треугольник можно бесконечно.

Несмотря на то, что треугольник Паскаля удивительно прост, он, как отметил выдающийся американский математик и писатель Мартин Гарднер, «*таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике*» (Гарднер, 2000).

Отметим некоторые свойства арифметического треугольника:

1. Каждое число равно сумме двух вышестоящих.
2. Третье число каждой строки является треугольным.
3. Четвертое число каждой строки является тетраэдрическим.
4. Сумма чисел n-й восходящей диагонали, проведенной через строку треугольника с номером $n-1$, есть n-е число Фибоначчи: 1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 1+3+1=5, 1+4+3=8, 1+5+6+1=13, 1+6+10+4=21 и т. д.

5. Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.

Первое свойство представляет собой рекуррентное суммативное правило.

Второе и третье свойство относятся к теории чисел, конкретнее – к фигурным числам, которые изучались еще в пифагорейские времена.

Четвертое свойство треугольника напрямую связано с числами Фибоначчи. Интересно, однако, что в треугольнике можно обнаружить и другие версии фибоначчиевых чисел. Для этого обычно пользуются сдвигом строк треугольника или наклонными линиями («диагоналями») (см., например, Пойя, 1976, с. 113–114; Газале, 2002, с. 34–36; Стахов, 2003).

Не все свойства треугольника были известны Паскалю. Ведь и по сей день исследователи находят все новые и новые свойства в этой замечательной структуре, связанные с теорией фракталов, теорией симметрии, теорией чисел, теории систем и др. (Абачиев, 2010, Кузмин, 2000, Успенский, 1979 и др.).

Что касается обсуждаемой эпохи, то идею арифметического треугольника Лейбниц распространил на гармонический ряд чисел, т. е. на числа, обратные числам натурального ряда. В историю он вошел как *гармонический треугольник* или *гармонический треугольник Лейбница*.

7. Системы счисления

К началу XVIII века относится работа Лейбница «Изложение двоичной арифметики, для которой достаточно только двух цифр 0 и 1, с замечаниями о ее пользе и о том, что она дает древним китайским фигурам Фохи» в 1759 г., были опубликованы письма Лейбница Якобу Бернулли и другим математикам по этому вопросу. Двоичная система состоит в том, что каждое целое число представляется в виде:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots + a_k \cdot 2^k + \ldots ,$$

где $a_k = 0$ или 1. Такое представление чисел лежало в основе древнеегипетского правила умножения чисел, и его же применяли Леонардо Пизанский в «Книге абака» и Лука Пачоли в «Сумме арифметики» при решении задачи о минимальном числе гирь, необходимом при взвешивании всех грузов, не превосходящих некоторого предела. Двоичная система рассматривалась также Дж. Непером (1617), а английский философ Фрэнсис Бэкон на основе двоичной системы составил специальный шифр.

Все это не поколебало десятичной системы, но двоичная система благодаря исключительной простоте, которую подчеркивал Лейбниц, получила позже применение в теоретико-информационных, кибернетике и вычислительной математике. В современных компьютерах используются обычно используются двоичные системы счисления. Но в последние годы стали конструироваться компьютеры, построенные на системах счисления, связанных с числами Фибоначчи (Стахов, 1977).

8. Непрерывные дроби, бесконечные произведения, бесконечные ряды

Числа натурального ряда являются одним из краеугольных камней математики. Краеугольными камнями математики являются, великие математические константы, например, числа *e*, π *и* φ. Можно поставить вопрос, связаны ли эти константы с целыми числами и друг с другом? Можно сформулировать вопрос еще шире: можно ли вычислить значения различного рода иррациональных чисел с любой степенью точности, пользуясь только целыми числами?

Оказалось, что такие способы существуют, и они достаточно просты.

Все началось с поиски наиболее простых способов приближенного выражения квадратных корней. Они привели профессора в Болонье Пьетро Антонио Катальди (1548–1626) к открытию *непрерывных (цепных) дробей*, позволяющих построить рациональное приближение любых квадратичных иррациональностей. Заслугой Катальди является выделение самого понятия непрерывной дроби. Он заметил также, что значения непрерывной дроби заключено между последовательными подходящими дробями.

В дальнейшем идеи Катальди были реализованы в «Арифметике бесконечных» Валлиса и работе Броукера, которым принадлежит изящное представление числа π в виде бесконечной непрерывной дроби:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+...}}}}$$

Валлис был первым математиком, который смело обращался к бесконечным процессам, вводя в анализ бесконечные ряды, бесконечные произведения, бесконечные дроби.

Позднее для того же выражения $\frac{\pi}{4}$ Лейбниц нашел еще более изящное выражение в виде знакопеременной суммы на основании свойств своего гармонического треугольника:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}....$$

Эта формула, как и многие ей подобные, очень просты и грациозны, если под грацией понимать динамическую гармонию (Краткий словарь по эстетике, 1983, с. 34). Вот, например, как характеризует бесконечный ряд Лейбница, русский математик Жуков: «Разве не содержит формула Лейбница…. изящный мотив: от такта к такту (от одного элемента к другому) повторяющуюся сумму (аналог орнамента с переносной симметрией)? В этом математическом «звукоряде» тесно переплетаются две противоборствующие мелодии – одна соответствует знаку «+», другая – знаку «–». … Изящная закономерность, которой подчиняются знаменатели бесконечной вереницы дробей – еще одна прекрасная форма, подчеркивающая красоту основного орнаментального мотива» (Жуков, 2004, с. 131).

Этот список эстетически значимых структур может быть продолжен. Так, Эйлер предложил такую радующую глаз правильностью и гармоничностью непрерывную дробь для числа *e:*

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 6 \ldots}}}}}}}$$

Но наиболее простой и изящной структурой является бесконечный радикал для золотого числа φ, открытый американским исследователем Натаном К. Альтшиллером. Но это произошло только в XX веке – в 1917 г.

Радикал выглядит так:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}}$$

Несколько позднее для числа φ была отрыта и непрерывная дробь:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Перечисленные варианты предельных значений основаны на математическом осознании идеи бесконечности, столь популярную в математике этого времени (вспомним хотя бы о теории бесконечно малых и теории предела и различных вариантах приближенных вычислений). Наверное, Паскаль был прав, сказав, что в «математике мы имеем дело с бесконечной бесконечностью соотношений» (Паскаль, с. 38).

9. Теория уравнений

Декарт в своих «Правилах для руководства ума» стремился дать универсальный метод решения задач. Воспользуемся наброском схемы, которую, как полагает Д. Пойя (Пойя, 1976), построил Декарт и которая может оказаться пригодной ко всем видам решаемых задач:

Первое: задача любого вида сводится к решению математической задачи.

Второе: математическая задача любого вида сводится к алгебраической задаче.

Третье: любая алгебраическая задача сводится к решению одного-единственного уравнения.

Проект Декарта был очень смелым и даже в чем-то важным правильным, но осуществить его на практике было крайне трудно и в конце концов он потерпел неудачу. Однако, несмотря на это, как отмечает Пойя (там же, с. 45), «это был великий проект, и, даже оставшись нереализованным, он оказал большее влияние на науку, чем тысяча малых проектов, в том числе тех, которые удалось реализовать».

Решение кубических уравнений в начале XVI в. было первым очевидным успехом в европейской математике со времен греков. Оно выявило мощь алгебры, которую греки не могли покорить. Еще одним человеком в XVI в., внесшим серьезный вклад в алгебру, был Франсуа Виет (1540–1603), освободивший алгебру от геометрических доказательств, подобных тем, которым пользовался Эвклид при обосновании золотой пропорции.

Впечатляющие успехи, достигнутые при решении кубического уравнения, увеличило надежды ученых, что и уравнения более высокой степени также могут быть решены с помощью так называемых радикалов. Это стало одной из самых центральных задач алгебры следующих столетий. Такие попытки предпринимались и в рассматриваемую эпоху.

Первым, кто смело и непринужденно обращался с алгебраическими уравнениями, был Ньютон в своем исследовании кривых третьего порядка (1703 г.). Ньютон построил систематику кривых третьего порядка и способы приближенного решения уравнений более высоких порядков. Огромное внимание этой проблеме уделяли и другие ученые, включая Эйлера.

Однако все попытки решить уравнение пятой степени в радикалах заканчивались неудачей. Самое большее, что удавалось сделать, – это привести его к виду $x^5 - x - 5 = 0$ только с одним параметром. Это было сделано Брингом (1786 г.) (Стилвел, с. 107). Результат Бринга появился в безвестном издании и оставался незамеченным в течение 50 лет, но заронил надежду на решение уравнений пятой степени с помощью радикалов. Однако Руффи (1799) предложил первое доказательство того, что это невозможно. Доказательство Руффи было не вполне убедительным, но он был реабилитирован, когда Абель (1826) дал убедительное доказательство того, что решение уравнений пятой и более степеней с помощью радикалов невозможно. Позднее он сделал это еще раз с помощью новой теории Галуа (1836).

10. Теория вероятностей и статистика

Задачи, которые оказали существенное воздействие на становление и развитие теории вероятностей, возникали в статистике: в практике деятельности страховых обществ, в государственной статистике, при обработке результатов астрономических наблюдений, в азартных играх, которые также были частью жизненной практики. Разработка вероятностных вопросов было тесно связано и с комбинаторикой, о которой мы говорили выше. Определенное влияние на развитие вероятностной теории оказывала проблема необходимости и случайности, которая ставилась в философии.

Большинство первых вероятностных задач связано с азартными играми, которые предоставляли исследователям наглядные модели и схемы и даже вероятностную терминологию.

Как мы уже отмечали, подсчетом очков при игре в кости занимались и крупнейшие математики XVI в.: Дж. Кардано, Н. Тарталья и др. Они же решали и задачу о справедливом разделе ставки, поставленную еще в 1494 г. Лукой Пачоли. При решении других задач вероятностного характера в работе «Об азартной игре», увидевшей свет только в 1663 г., Кардано фактически уже пользовался теоремами сложения и умножения вероятностей, а также близко подошел к классическому определению вероятности (Юшкевич, с. 82). Четверть века спустя Я. Бернулли установил закон больших чисел, носящий его имя.

В 1664 г. между Паскалем и Ферма завязалась переписка по поводу ряда задач, в том числе и задачи о разделе ставки. В ходе переписки они приходят к верному решению этой задачи, используя вероятностный подход путем разделения ставки пропорционально выигрышу всей ставки, если игра будет продолжаться неопределенно долго.

Первым руководством по теории вероятностей была книга великого голландского ученого Христиана Гюйгенса (1629–1695). В своей книге «О расчетах в азартной игре» (1657) Гюйгенс писал: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы глубокой и интересной теории » (цт. по: Юшкевич, с. 89). Гюйгенс вводит понятие математического ожидания и способы его вычисления в различных вероятностных схемах. На практике математическое ожидание впервые применил Кеплер, назвав его средним арифметическим. Этот тип средней использовался и в античные времена в рамках теории пропорций. Кеплер же, обрабатывая обширные данные Тихо Браге, использовал понятие средней арифметической уже в статистическом смысле как результат вычисления на основе неопределенного числа измерений.

В конце XVII в. широкое распространение получили работы по политической арифметике, посвященные главным образам демографическим проблемам. В этих исследованиях положено начало исследование статистических масс. Кроме того, были обнаружены первые статистические закономерности, в частности Джон Граунт (1620–1674) показал, что число родившихся мальчиков относится к числу родившихся девочек как 14 к 13, что смертность человека больше в начале жизни, а относительная смертность от ряда болезней статистически устойчива.

11. Значение математико-гармонических изысканий в эпоху рационализма

1. Рационалисты XVIII в. были убеждены в том, что в человеческом *обществе* должны господствовать логика, разум, порядок, а, следовательно, право и справедливость. Все иррациональное (слепую веру, нетерпимость, невежество) они подвергали жесточайшей критике.

2. В пределах духа и буквы рационализма были сформулированы требования поэтики французского классицизма: гармония и соразмерность частей художественного произведения, логическая стройность композиции, простота сюжета, ясность, четкость и лаконичность языка.

3. Кеплер впервые поставил вопрос о формообразовании в природе, рассматривая тела шестиугольной и пятиконечной формы. Многие ученые, например, Вернадский, считают его основоположником кристаллографии.

4. Кеплер является автором космогонической теории, согласно которой шесть сфер, соответствующие орбитам шести планет – Сатурна, Юпитера, Марса, Земли, Венеры и Меркурия, разделяются многогранниками: кубом, тетраэдром, додекаэдром, октаэдром и икосаэдром. И хотя его гипотеза оказалась ошибочной, она, с одной стороны, способствовала развитию теории многогранников, а с другой, привела к построению тем же Кеплером новой более естественной теории, а затем – теории всемирного тяготения Ньютона.

5. Кеплер впервые связал структуру додекаэдра и икосаэдра с божественной пропорцией Луки Пачоли, а последнее – с последовательностями Фибоначчи.

6. Как научная дисциплина конституировалась комбинаторика. Блезом Паскалем был переоткрыт знаменитый треугольник, в котором Паскаль объединил алгебру и комбинаторику. Треугольник впоследствии был использован для интерпретации последовательности Фибоначчи и дочерних структур.

7. Лейбницем была открыта двоичная система счисления, которая через два века выступила в качестве математической основы вычислительных машин.

8. Катальди открыл непрерывные дроби, которые вначале использовались для приближенного вычисления квадратных корней, а затем для представления чисел e и π. Впоследствии такие дроби использовались для представления золотого числа φ и других замечательных чисел.

8. Вышел первый учебник по теории вероятностей, написанный Гюйгенсом. В этом учебнике введены основные понятия этой теории, в частности понятие математического ожидания. Кеплер перевел это понятие в понятийную область статистики, назвав его средним арифметическим. Кроме того, обрабатывая большие массивы астрономических данных, накопленным Браге, Кеплер создал прецедент массового исследования, являющегося основой статистики.

Литература

Абачиев С. К. Радужная фрактальность треугольника Паскаля. http://spkurdyumov.narod.ru/Mat100.htm#Ma344.
Буало Н. Поэтическое искусство. М.: Государственное издательство художественной литературы, 1957.
Вейль Г. Симметрия. Перевод с англ. М.: Издательство ЛКИ, 2007.
Вернадский В. И. Основы кристаллографии. М., 1904, ч. 1, вып. 1.
Гарднер М. Математические новеллы. Гл. 17. Неисчерпаемое очарование треугольника Паскаля. М.: Мир, 1974.
Гилберт К., Кун Г. История эстетики. Перевод с англ. М.: Издательство Иностранной литературы, 1960.
Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2006.
Декарт Р. Рассуждение о методе. М.: Изд-во АНСССР, 1953.
Жуков А. В. Вездесущее число π. М.: Editorial УРСС, 2004.
Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. М.-Л., ГТТИ, 1935.
Кеплер И. О шестиугольных снежинках. М.: Наука, 1983.
Краткий словарь по эстетике. Под ред. М. Ф. Овсянникова. М.: Просвещение, 1983.
Кузмин О. В. Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения. Соросовский образовательный журнал. 2000, т. 6, № 5, с. 100–109.
Курант Р., Роббинс Н. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. Перевод с англ. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: МЦНМО, 2001.
Мартыненко Г.Я., Математика Гармонии: Возрождение (XIV–XVI вв.) (к 500–летию книги Луки Пачоли «О божественной пропорции») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.16006, 20.07.2010
Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI- XVII вв. М.: Наука, 1979.
Паскаль Б. Мысли. Перевод с французского. СПб: Азбука-Классика, 2005.
Пойя Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. Перевод с англ. М.: Наука, 1976.
Стахов А. П. Введение в адгоритмическую теорию измерения. М.: Советское радио, 1977.
Стахов А. П. Сакральная геометрия и математика гармонии // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та містецтві. Вінниця: Вінницький державний аграрний університет, 2003. С. 8–26.
Стахов А.П. Формула Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005.
Стилвел Д.. Математика и ее история. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
Успенский В.А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1979.
Фукс Д., Фукс М. Арифметика биномиальных коэффициентов // Квант — 1970. — № 6. — С. 17–25.
Шафрановский И. И. Кристаллографические представления И. Кеплера и его трактат «О шестиугольных снекжинках. М., 1971.

Шафрановский И. И. История кристаллографии с древнейших времен до начала XIX столетия. Л.: Наука, 1978.
Штерн А. С. Введение в психологию: Курс лекций. М.: Флинта. Московский психолого-социальный институт, 2003.
Эйнштейн А. Иоганн Кеплер. В книге: Эйнштейн А. Собрание научных трудов в четырёх томах. М.: Наука. 1965–1967 гг. Под ред. И. Е. Тамма, Я. А. Смородинского, В. Г. Кузнецова. Том IV, стр. 121.
Bense M.. Einführung in die Informations-theoretische Ästhtik. Hamburg, 1969.
Darling D. "Leibniz' harmonic triangle" in *The Universal Book of Mathematics: From Abracadabra To Zeno's paradoxes*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2004.
Livio M. The Golden Ratio. The Story of Phi, The World's Most Astonishing Numbers. New York, Broadway books, 2002.
Schneer C. Kepler's New Year's Gift of a Snowflake. Isis, Volume 51, No. 4. University of Chicago Press, 1960, pp. 531–545.