А.П. Стахов

«ЗОЛОТАЯ» ГОНИОМЕТРИЯ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

Развитие современной «математики гармонии» [1] осуществляется в трех основных направлениях:

1. «Обобщенная теория золотого сечения», в основе которой лежит понятие *p-чисел Фибоначчи* и *золотого p-сечения*. Эта теория значительно расширила предмет фибоначчиевых исследований (*p*-числа Фибоначчи) и ввела в рассмотрение новые математические константы (золотые *p*-сечения). Как известно, *p-числа Фибоначчи* возникли при решении двух задач – задачи синтеза оптимальных алгоритмов измерения [2] и исследования диагональных сумм треугольника Паскаля [3]. Заметим, однако, что в книге [3] знаменитый математик Пойа не ввел *p-числа Фибоначчи*; он лишь наметил путь их получения с использованием треугольника Паскаля. И это, несомненно, является важным математическим результатом, принадлежащим Пойа. Наиболее важными приложениями этого направления стали *p-коды Фибоначчи и арифметика Фибоначчи* [4], *коды золотой p-пропорции* [5], *закон структурной гармонии систем* [6] и др. В рамках этого направления возникла *алгоритмическая теория измерения* [4], а также концепция *«золотой» теории чисел* [7].

2. «Обобщенная теория золотого сечения», основанная на «*металлических пропорциях*», введенных аргентинским математиком Верой Шпинадель в 1998 г. [8]. В настоящее время нет окончательного согласия в том, кто первым ввел в рассмотрение «*металлические пропорции*». Многие российские исследователи считают, что первым их ввел в рассмотрение российский исследователь Александр Татаренко, который в своих работах утверждает, что он ввел их в рассмотрение в 1995 г. Он назвал эти пропорции T_m*-гармониями* [9]. В последнее годы было, однако, установлено, что независимо от Веры Шпинадель и Александра Татаренко к этим пропорциям пришли Мидхат Газале [10] и Джей Каппрафф [11]. Но на этом спор о приоритете не закончился, и наш Международный online семинар внес существенные коррекции в этот спор. Как следует из статьи [12], эти пропорции были введены в рассмотрение Виктором Шенягиным еще в 1997 г. в философском эссе «Пифагор, или Каждый создает свой миф», опубликованном в литературном журнале Союза писателей Молдовы «Кодры. Молдова литературная» (1997, № 9-10).

Но, по-видимому, всех превзошел Грант Аракелян. Приведем цитату из его замечательной статьи [13]:

«Воздавая должное независимым исследованиям золотого семейства, мы вспомнили и о своей ранней работе "Числа и величины в современной физике" [14]. *В интернете нами она не выложена, но имеется в основных библиотеках России, в том числе в бывшей "Ленинке", а ныне РГБ – в виде книги-докторской диссертации, защищенной в 1992 г. в Санкт-Петербургском государственном университете. Золотое сечение, хотя и не основная тема этой монографии, внимание ей уделено там немалое – в общей сложности около сорока страниц из трехсот, в основном тексте и в приложении к нему. Фактически это как бы предварительный, относительно небольшой по объёму, сырой вариант последних четырёх глав опубликованной на сайте АТ книги* [14].

***А** там есть многое из того, что стало сегодня предметом разговоров относительно первичности тех или иных публикаций. Результатам по золотому сечению, изложенным в двадцатидвухлетней давности книге, мы, по правде говоря, большого значения никогда не придавали и вспомнили о них лишь в процессе написания настоящей статьи. **Научный приоритет, авторское право, авторское самолюбие,** чтобы не сказать тщеславие – материя тонкая, здесь требуется предельная деликатность, чтобы не задеть кого-то ненароком. Один и тот же конечный результат может быть получен, возможно и разными методами, сразу несколькими авторами и независимо друг от друга. В науке такое нередко случается, в случае же математики ЗС авторство сплошь и рядом устанавливается больше на глаз, чем документально аргументировано и строго однозначно. Щекотливая, что и говорить, тема, но нам её уже не избежать».*

И далее Грант Аракелян приводит выдержки из его книги [14], в которой показано, что в ней введена экспоненциальная трактовка «металлических пропорций» Веры Шпинадель, а также исследована «серебряная» пропорция, откуда вытекает, что эти пропорции были введены Аракеляном до работ Шпинадель и Татаренко!

Вполне возможно, что это - не окончательная точка в споре о приоритете в открытии «металлических пропорций». **Но на данный момент мы имеем все основания утверждать, что первым к «металлическим пропорциям» пришел Грант Аракелян еще в 1989 г.**

Главной математической идеей развиваемой в работах Аракеляна [13, 15] «обобщенной теория золотого сечения» являются «металлические пропорции». Для этого достаточно внимательно проанализировать, например, Таблицу 8.7 из книги [15], в которой приведены новые математические константы, которые есть ни что иное, как «металлические пропорции».

События развиваются настолько стремительно, что в момент написания этой статьи Виктор Шенягин опубликовал новую статью [16], в которой он ввел еще один класс пропорций, названных им *корневыми r-пропорциями*. При этом приведенные Виктором Шенягиным примеры использования корневых r-пропорций для уточнения ряда физических констант, в частности, *числа Фейгенбаума* F=4,669201609, характеризующего закономерность в чередовании бифуркаций, дают основание полагать, что *корневые r-пропорции* Виктора Шенягина имеют глубокие физические корни и, несомненно, представляют фундаментальный интерес.

Заметим, что «металлические пропорции» или T_m-гармонии вызвали большой интерес представителей теоретической физики. Здесь уместно упомянуть о работах российского физика Александра Майбороды [17,18], в которых обсуждается связь T_m-гармоний Татаренко с *Естественной системой единиц Планка*. В этой связи уместно упомянуть и работу украинского физика Николая Косинова [19], в которой с использованием обобщенного рекуррентного соотношения a(n)=±ka(n–1)±a(n–2) приведен «новый класс золотых констант», частными случаями которых являются классическая золотая пропорция и «металлические пропорции». При этом отмечается [19], что *«сам факт того, что золотая пропорция является всего лишь одним из представителей большого семейства золотых констант не означает, что золотая пропорция утрачивает свою уникальность и исключительное место в гармонии природы. Появляется шанс снять с нее ореол таинственности и обоснованно определить ей место в семействе золотых констант, а также выяснить ее глубинный смысл, позволяющий ей выступать «орудием мышления» и «принципом мира и природы»*.

3. Еще одним оригинальным направлением, возникшим в рамках «математики гармонии» [1], являются *гиперболические функции Фибоначчи и Люка* [20,21], также представляющие фундаментальный интерес. Впервые эти функции были описаны в статье А.П. Стахова и И.С. Ткаченко, опубликованной в 1988 г. в виде препринта. В 1993 г. статья этих авторов на эту тему, согласно рекомендации академика Юрия Митропольского, опубликована в Докладах Академии наук Украины [20]. Теория *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* (*ГФФЛ*) получила развитие в работе Стахова и Розина [21], опубликованной в Международном журнале Chaos, Solitons and Fractals в 2004 г. В этой статье введены так называемые *симметричные ГФФЛ*, обладающие важным свойством *симметрии*, характерным для классических гиперболических функций, широко используемых в теоретическом естествознании.

По существу ГФФЛ являются расширением *чисел Фибоначчи и Люка* на непрерывную область, при этом числа Фибоначчи и Люка совпадают с ГФФЛ в дискретных точках непрерывного аргумента $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Поэтому введение ГФФЛ знаменует новый (непрерывный) этап в развитии «теории чисел Фибоначчи» [23,24]. При этом дискретная по своей природе «теория чисел Фибоначчи» как бы «вырождается» и превращается в частный случай непрерывной по своей природе теории ГФФЛ. Заметим, что все дискретные тождества для чисел Фибоначчи и Люка могут быть получены из соответсвующих тождеств для ГФФЛ путем простой замены непрерывной переменной x ее дискретными значениями $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Пожалуй, наиболее важным доказательством фундаментального характера ГФФЛ является новая геометрическая теория филлотаксиса, созданная украинским архитектором Олегом Боднаром [24].

Оказалось, что идея симметричных ГФФЛ, основанных на классической золотой пропорции [21], легко обобщается на случай «металлических пропорций». Это было сделано автором в 2006 г. в статье [25] и затем в статье [26], опубликованных на сайте АТ. Цель настоящей статьи – еще раз привлечь внимание к новой теории «золотых» гиперболических функций, названной «золотой» гониометрией», в свете «обобщенной теории золотого сечения», развиваемой в [13,15], а также скорректировать Заключение к статье [26], с учетом новой информации в споре о приоритете в открытии «металлических пропорций».

Напомним, что при заданном действительном $\lambda > 0$ под «металлическими пропорциями» понимается класс математических констант, задаваемых следующим следующим математическим выражением:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{1}$$

Тогда гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка задаются следующими выражениями:

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{2}$$

$$cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \tag{3}$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x} = \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \tag{4}$$

$$cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x} = \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \tag{5}$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda > 0$ - заданное действительное число.

Заметим, что количество новых гиперболических функций (2)-(5) теоретически бесконечно; их столько же, сколько существует действительных чисел $\lambda > 0$.

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (2)-(5) сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка, введённым в работе [21]:

Симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Симметричный гиперболический синус и косинус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}; \qquad cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}, \tag{7}$$

где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - *золотая пропорция.*

Исследование свойств функций (2)-(5), проведенное в [25,26], приводит к следующему Заключению, которое мы скорректируем с учетом новейшей информации в этой области.

Заключение: роль «металлических пропорций» и «золотой» гониометрии в развитии гиперболической геометрии, современного теоретического естествознания и «обобщенной теории золотого сечения»

Обсуждая эту роль, хотелось бы привлечь внимание к следующим выводам:

1. Необходимо ввести коррекции по поводу приоритета в открытии «металлических пропорций». Как вытекает из книги [14], впервые эти пропорции были введены армянским физиком Грантом Аракеляном в 1989 г. Независимо от него эти же пропорции были введены в науку российским инженером Александром Татаренко (1995, по словам Татаренко, 1999 – время первой публикации) [9], российским исследователем Виктором Шенягиным (1997) [12], аргентинским математиком Верой Шпинадель (1998) [8], французским математиком египетского происхождения Мидхатом Газале (1999) [10], американским математиком Джееем Каппраффом (2002) [11]. «Металлические пропорции» представляют собой широкое обобщение понятия «золотой пропорции» и расширяют наши представления о «гармонических» пропорциях. Следует отметить, что такая временная плотность в этом открытии, действительно, удивляет, но с другой стороны, свидетельствует о том, что современная наука «созрела» к этому математическому открытию, а современная теоретическая физика уже приступила к использованию новых математических констант в физической науке [17-19].

2. «Металлические пропорции» лежат в основе *формул Газале* [10], которые задают новые классы рекуррентных числовых последовательностей (λ-*числа Фибоначчи и Люка*) и являются обобщением *формул Бине*, что представляет фундаментальный интерес для развития «обобщенной теории золотого сечения».

3. «Металлические пропорции» являются основаниями нового класса гиперболических функций – *гиперболических* λ*-функций Фибоначчи и Люка*, которые составляют основу «золотой» гониометрии [25,26].

4. С использованием «золотой» гониометрии в работах [29-32] дано оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта, что является существенным вкладом в развитие современной математики и гиперболической геометрии, в частности.

5. «Геометрия Боднара» [24,33] открыла нам новый *«гиперболический мир»* - мир филлотаксиса, которые отличается от «гиперболического мира» теории относительности (в трактовке Минковского) тем, что в основе «геометрического мира» филлотаксиса лежит не «число Эйлера» *e*, а «золотая пропорция».

6. «Геометрия Боднара» [24,33] и «золотая» гониометрия [25,26] являются основанием для постановки новой задачи перед теоретическим естествознанием – задачу поиска таких физических, химических, ботанических или биологических явлений Природы, гиперболическая геометрия которых отличается от классической геометрии Лобачевского и соответствует новым λ-геометриям, например, «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим λ-геометриям, описанным в работах [30-32]. При этом можно ожидать, что первые успехи в этом направлении будут связаны с «серебряной» пропорцией $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$, связанной с *числами Пелли.* По-видимому, эта пропорция представляет особый интерес для теоретического естествознания. По мнению Александра Татаренко, эта пропорция или T_2-гармония *«буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам. Установление факта доминантности T_2-Гармонии, а с ней и особого статуса ее «функции» $\overline{T}_2 = \sqrt{2}$ является заключительным аккордом — важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника»*.

Литература

1. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai: World Scientific, 2009.
2. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1970.
3. Д.Пойа. Математическое открытие (пер. с английского). Москва: Наука, 1970.
4. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
5. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
6. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
7. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал,том. 56, 2004 г. (см. также http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322039.htm)
8. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004)
9. Татаренко А.А. Золотой Тm-канон антропокосмоса – гармония золотых Тm-Гармоний мира. Рериховский вестник Дона № 11, 1999.
10. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод: Газале М. От фараонов до фракталов / Пер. с англ. А.Р. Логунова. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002).
11. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
12. В.П. Шенягин, «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых *s*-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm
13. Грант Аракелян, О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm
14. Грант Аракелян. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989.
15. Грант Аракелян, Теория ЛМФ и принцип золотого сечения. Глава 8 // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16865, 02.10.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321231.htm
16. В.П. Шенягин, Корневые *r*-пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17112, 17.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322086.htm
17. А.О. Майборода, Естественная система единиц Планка и обобщенная формула «золотой пропорции» Татаренко-Шпинадель-Газале // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14814, 02.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321086.htm
18. А.О. Майборода, Новый способ получения чисел Фидия и Татаренко // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17102, 14.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322082.htm
19. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm
20. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.

21. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. *Chaos, Solitons & Fractals* **2004**, 23(2): 379-389.

22. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва: Наука, 1978 (первое издание, 1961).

23. Hoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.

24. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994

25. А.П. Стахов, Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

26. А.П. Стахов, «Металлические пропорции», формулы Газале, «золотая» фибоначчиева гониометрия и их роль в развитии гиперболической геометрии, современного теоретического естествознания и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15344, 15.06.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321119.htm

27. А.П. Стахов, С.Х. Арансон, «Золотая» фибоначчиевая гониометрия, четвёртая проблема Гильберта, преобразования фибоначчи-лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15225, 12.04.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322036.htm

28. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and “Golden” Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2 (January), 74-84

29. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar’s Geometry). Applied Mathematics, 2011, 2 (February), 181-188

30. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert’s Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March).

31. Олег Боднар, Теория относительности и филлотаксис: сходство и различие геометрических интерпретаций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17097, 12.12.2011

32. Татаренко А.А. «T_m — принцип» — всемирный закон гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12575, 10.11.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm